2019-2020, II. DÖNEM MAT468 FONK. ANALİZ ARASINAV SORULARININ ÇÖZÜMLERİ

1) a) $X = X_1 \times X_2$, $\rho(x,y) = \sqrt{d_1(x_1,y_1)^2 + d_2(x_2,y_2)^2}$

ρ nun M_1, M_2, M_3 koşullarını sağladığını gösterelim. d_1, d_2 metrik olduğundan

M1. $\rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{d_1(x_1,y_1)^2 + d_2(x_2,y_2)^2} = 0$
$\Leftrightarrow d_1(x_1,y_1)^2 + d_2(x_2,y_2)^2 = 0$
$\Leftrightarrow d_1(x_1,y_1)^2 = 0,\ d_2(x_2,y_2)^2 = 0$
$\Leftrightarrow d_1(x_1,y_1) = 0,\ d_2(x_2,y_2) = 0$
$\Leftrightarrow x_1 = y_1,\ x_2 = y_2$
$\Leftrightarrow x = y$

$\Rightarrow M_1$ sağlanır.

M2. d_1, d_2 metrik olduğundan her $x, y \in X_1 \times X_2$ için
$\rho(x,y) = \sqrt{d_1(x_1,y_1)^2 + d_2(x_2,y_2)^2} = \sqrt{d_1(y_1,x_1)^2 + d_2(y_2,x_2)^2}$
$= \rho(y,x)$

M3. d_1, d_2 metrik olduğundan $\forall x,y,z \in X_1 \times X_2$ için
$\rho(x,y) = \sqrt{d_1(x_1,y_1)^2 + d_2(x_2,y_2)^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^{2} d_k(x_k,y_k)^2}$
$\leq \sqrt{\sum_{k=1}^{2} [d_k(x_k,z_k) + d_k(z_k,y_k)]^2}$

olur. Minkowski eşitsizliğinden $(p=2)$
$\sqrt{\sum_{k=1}^{2} [d_k(x_k,z_k) + d_k(z_k,y_k)]^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{2} d_k(x_k,z_k)^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{2} d_k(z_k,y_k)^2}$
$= \rho(x,z) + \rho(z,y)$

$\Rightarrow \rho(x,y) \leq \rho(x,z) + \rho(z,y)$ olur.

b) $f: X_1 \to X_2$ sürekli (dolayısıyla dizisel sürekli) ve $(a,b) \in \overline{Gr(f)}$ olsun. Kapanış tanımından $Gr(f) \subset \overline{Gr(f)}$ dir. $\Rightarrow (a,b) \in \overline{Gr(f)}$ olur. $\overset{\text{Teo.}}{\Longrightarrow}$ (X,ρ) çarpım uzayında $(x_n, f(x_n)) \to (a,b)$ $(n\to\infty)$ olacak şekilde X_1 de bir (x_n) dizisi vardır. ρ nın tanımından X_1 de $x_n \xrightarrow{d_1} a$, ve X_2 de $f(x_n) \xrightarrow{d_2} b$ $(n\to\infty)$ dır. f sürekli $\Rightarrow$ dizisel sürekli

$\Rightarrow b = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$ dır. O halde $(a,b) = (a, f(a)) \in Gr(f)$

$\Rightarrow \overline{Gr(f)} \subset Gr(f)$ ve böylece $\overline{Gr(f)} = Gr(f)$ dir.

$\Rightarrow Gr(f)$ kapalıdır.

2) a) $A = \{ f \in C[a,b] : f(a) = f(b) \}$,

$$d(f,g) = \max_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)|$$

$C[a,b]$ nin d metriğine göre tam olduğu biliniyor.

O halde Teo. gereği (Teo. Tam uzayın kapalı alt uzayı da tamdır)
A nın tam olduğunu göstermek için kapalı olduğunu göstermek gerekir. Bunun için

$f \in \bar{A}$ alalım 2.4.2 Teo. gereği $\exists (f_n) \subset A : f_n \to f$ (max) dır.

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0$ için $\max_{x \in [a,b]} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0$ için $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \ \forall x \in [a,b]$

yazılır. bu ise Bu ise $\mathbb{R}$ de

$f_n(a) \to f(a)$ ve $f_n(b) \to f(b)$ demektir.

$(f_n) \subset A$ olduğundan $f_n(a) = f_n(b)$ dir.

$$0 = \lim_{n \to \infty} (f_n(a) - f_n(b)) = f(a) - f(b) \Rightarrow f(a) = f(b) \Rightarrow$$

$f \in A$ olur. Yani $\bar{A} \subset A$ dır $\Rightarrow \bar{A} = A \Rightarrow A$ kapalı
$\Rightarrow A$ tam olur.

b) $B = \{ f \in C[-1,1] : f(x) \geq 0 \}$

$f, g \in B \Rightarrow f, g \in C[-1,1]$, $f(x) \geq 0$, $g(x) \geq 0$ dır.

$f(x) + g(x) \geq 0$, ancak $\alpha < 0$ için

$(\alpha f)(x) = \alpha \cdot f(x) < 0 \Rightarrow \alpha f \notin B$ dir.

B lineer altuzay değildir

3) X bir vektör uzayı olsun. $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

N_1 $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$, N_2 $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$ $(\alpha \in F)$
N_3 $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$
koşullarını sağlarsa $\|\cdot\|$ fonksiyonuna X de norm, $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine de normlu uzay denir.

· $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayındaki $\|\cdot\|$ fonksiyonu süreklidir:

$\big| \|x\| - \|y\| \big| \leq \|x - y\|$ kullanılır.

$\forall \varepsilon > 0$ verildiğinde $\delta = \varepsilon$ seçilirse

$\|x - y\| < \delta$ iken $|f(x) - f(y)| = \big| \|x\| - \|y\| \big| \leq \|x - y\| < \delta = \varepsilon$

$\Rightarrow \|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ süreklidir.

$(X, \|\cdot\|)$ da $+: X \times X \to X$, $\cdot\ F \times X \to X$
toplama ve skalerle çarpma işlemleri süreklidir:
$x_n \to x$, $y_n \to y$ iken $x_n + y_n \to x + y$ olduğu gösterilmeli
$\forall \varepsilon > 0$ verilsin
$x_n \to x \Rightarrow \exists n_1 \in \mathbb{N}: \forall n > n_1$ için $\|x_n - x\| < \varepsilon/2$,
$y_n \to y \Rightarrow \exists n_2 \in \mathbb{N}: \forall n > n_2$ için $\|y_n - y\| < \varepsilon/2$

$n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ dersek, $\forall n > n_0$ için
$\|x_n + y_n - (x+y)\| \leq \|x_n - x\| + \|y_n - y\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$
$\Rightarrow x_n + y_n \to x + y \ (n \to \infty)$ olur.

$(\alpha_n) \subset F$, $\alpha_n \to \alpha$ olsun. Yakınsak dizi sınırlı old.
$|\alpha_n| \leq M$ o.ş. $M > 0$ var
$\forall \varepsilon > 0$ için $\exists n_1 \in \mathbb{N}: \forall n > n_1$ için $\|x_n - x\| < \varepsilon / M+1$
$\alpha_n \to \alpha \Rightarrow \exists n_2 \in \mathbb{N}: \forall n > n_2$ için $|\alpha_n - \alpha| < \varepsilon / \|x\|+1$
$n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ dersek $\forall n > n_0$ için

$$\|\alpha_n x_n - \alpha x\| = \|\alpha_n x_n - \alpha_n x + \alpha_n x - \alpha x\|$$
$$\leq \|\alpha_n (x_n - x)\| + \|x(\alpha_n - \alpha)\|$$
$$= |\alpha_n| \cdot \|x_n - x\| + \|x\| \cdot |\alpha_n - \alpha|$$
$$< M \cdot \frac{\varepsilon}{\underbrace{2(M+1)}_{<1}} + \|x\| \cdot \frac{\varepsilon}{\underbrace{2(\|x\|+1)}_{>1}} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$\Rightarrow \alpha_n x_n \to \alpha x$.

(4) Her normlu uzay metrik uzaydır.
$d(x,y) = \|x - y\|$ olarak tanımlanan d fonksiyonu bir metriktir ve $\|x\| = d(x, \theta)$ dır.
M1 $d(x,y) = \|x - y\| = 0 \Leftrightarrow x = y$
M2 $d(x,y) = \|x - y\| = \|-(y-x)\| = |-1| \cdot \|y - x\| = d(y,x)$
M3 $d(x,y) = \|x - y\| \leq \|x - z\| + \|z - y\| = d(x,z) + d(z,y)$
$x \neq y$, $x, y \in X$, $\alpha \neq 0, \alpha \neq 1$ elemanlarını alalım.
$x \neq y$ olduğundan $\alpha x \neq \alpha y$ olup $d(\alpha x, \alpha y) = 1 \neq |\alpha| \cdot d(x,y) = |\alpha|$
olur. Homotesi öz. $d(\alpha x, \alpha y) = |\alpha| \cdot d(x,y)$ koşulu
gerçeklenmediğinden d_A ayrık metriği normdan üretilmemiştir.

a) $(X_1, \|\cdot\|_1)$, $(X_2, \|\cdot\|_2)$ normlu uzaylar, $X = X_1 \times \cdots \times X_n$,
$\|x\|_m = \max\{\|x_k\|_k : k=1,2,\ldots,n\}$, $\|x\|_t = \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|_k$

5. N1 $\|x\|_m = 0 \iff \forall k=1,2,\ldots,n$ için $\|x_k\|_k = 0$
$\iff \forall k=1,2,\ldots,n$ için $x_k = 0$
$\iff x = (x_1,\ldots,x_n) = (0,0,\ldots,0) = 0$.

N2. $\|\alpha x\|_m = \text{maks}\{\|\alpha x_k\|_k : k=1,2,\ldots,n\}$
$= \text{maks}\{|\alpha| \cdot \|x_k\|_k : k=1,\ldots,n\}$
$= |\alpha| \text{ maks}\{\|x_k\|_k : k=1,2,\ldots,n\}$
$= |\alpha| \cdot \|x\|_m$.

N3. $\|x_k + y_k\|_k \le \|x_k\|_k + \|y_k\|_k \Rightarrow$ maks geçilirse
$\text{maks}_k \|x_k + y_k\|_k \le \text{maks}_k \|x_k\|_k + \text{maks}_k \|y_k\|_k$
$\Rightarrow \|x+y\|_m \le \|x\|_m + \|y\|_m$ olur.

$\|x\|_t = 0 \iff \forall k=1,2,\ldots,n$ için $\|x_k\|_k = 0 \iff x = 0$
$\|\alpha x\|_t = \sum_{k=1}^{n} \|\alpha x_k\|_k = \sum_{k=1}^{n} |\alpha| \cdot \|x_k\|_k = |\alpha| \cdot \|x\|_t$

$\|x_k + y_k\|_k \le \|x_k\|_k + \|y_k\|_k \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \|x_k + y_k\|_k \le \sum \|x_k\|_k + \sum \|y_k\|_k$
$\Rightarrow \|x+y\|_t \le \|x\|_t + \|y\|_t$.

b) $f : (X, \|\cdot\|_m) \to (Y, \|\cdot\|)$ sürekli olsun.
$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \|x-a\|_m < \delta$ iken $\|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$.
$\|x-a\|_m < \delta \Rightarrow \|x_k - a_k\|_k < \delta$ olur. $\forall k=1,2,\ldots,n$ için
o zaman $\|x_k - a_k\|_k < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$ olur.
Tersine, $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall k=1,2,\ldots,n$ için
$\|x_k - a_k\|_k < \delta$ iken $\|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$ olsun.
Her $k=1,2,\ldots,n$ için $\|x_k - a_k\|_k < \delta$ iken mak. sağlanır.
Yani $\|x-a\|_m < \delta$ olur. Dolayısıyla $\|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$
olacağından $f : (X, \|\cdot\|_m) \to (Y, \|\cdot\|)$ süreklidir.